



گزینه ۲

۱

چون سطح بدون اصطکاک است، انرژی مکانیکی پایسته است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_2 \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \\
 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 &= \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 \\
 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 16 + 10 \times 5 &= \frac{1}{2} \times 36 + 10h_2 \\
 \Rightarrow 58 &= 18 + 10h_2 \Rightarrow 10h_2 = 40 \Rightarrow h_2 = 4 \text{ m}
 \end{aligned}$$

بنابراین مقدار مسافت طی‌شده بر روی سطح برابر است با:

$$\sin 53^\circ = \frac{h_2}{d} \Rightarrow \frac{4}{10} = \frac{4}{d} \Rightarrow d = 5 \text{ m}$$

گزینه ۳

۲

$$E_1 = K_2 + \cancel{U_1} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$E_1 = \frac{1}{2} \times 6 \times 64 = 192 \text{ J}$$

$$E_2 = K_2 + U_2 \xrightarrow{K_2 = \frac{1}{2}U_2} E_2 = \frac{1}{2}U_2 + U_2 = \frac{3}{2}U_2$$

$$\left. \begin{aligned} E_2 &= \frac{3}{2}U_2 \\ E_2 &= E_1 = 192 \text{ J} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3}{2}U_2 = 192 \Rightarrow U_2 = 128 \text{ J}$$

باتوجه به این که سطح بدون اصطکاک است می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} E_A &= E_B \Rightarrow U_A + K_A = U_B + K_B \\ \Rightarrow mgh_A + 0 &= mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2 \\ \Rightarrow 10 \times 6 &= 10 \times 2 + \frac{1}{2}v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \text{ m/s} \end{aligned}$$

کار مفید انجام شده توسط تلمبه برقی برابر با تغییر انرژی جنبشی جسم از لحظه سقوط تا لحظه برخورد به زمین است. با استفاده از قضیه کار-انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$W_{\text{مفید}} = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} \times 4(25 - 0) = 50 \text{ J}$$

و در نهایت با استفاده از رابطه $R_a = \frac{P_{av}'}{P_{av}}$ داریم:

$$R_a = \frac{50}{80} = 0.625 \Rightarrow R_a = 62.5\%$$

$$\text{انرژی کل} = 1/5 \times 3/2 \times 10^4 = 4/8 \times 10^4 \text{ kJ} = 4/8 \times 10^4 \text{ J}$$

$$K = 0.2 \times 4/8 \times 10^4 = 9/6 \times 10^6 \text{ J}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow 9/6 \times 10^6 = \frac{1}{2} \times 3000 \times v^2$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{9/6 \times 10^6}{1/5 \times 10^3} = 6/4 \times 10^3 = 6400 \Rightarrow v = \sqrt{6400} = 80 \text{ m/s}$$

ابتدا توان مفید بالابر را به دست می‌آوریم:

$$R_a = \frac{P_{\text{مفید}}}{P_{\text{کل}}} \Rightarrow \frac{60}{100} = \frac{P_{\text{مفید}}}{500} \Rightarrow P_{\text{مفید}} = 300 \text{ W}$$

و در آخر با استفاده از رابطه $P = \frac{W}{t}$ ، مدت‌زمان بالا بردن جسم را محاسبه می‌کنیم:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{mgh}{t} \Rightarrow 300 = \frac{6 \times 10 \times 20}{t} \Rightarrow t = 4 \text{ s}$$

با توجه به این که در هر دو حالت توان‌ها یکسان است و با استفاده از قضیه کار-انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$W_1 = \Delta K_1 = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} m (36 - 4) = 16 \text{ m}$$

$$W_2 = \Delta K_2 = \frac{1}{2} m (v_4^2 - v_3^2) = \frac{1}{2} m (144 - 64) = 40 \text{ m}$$

$$P_{\text{av1}} = P_{\text{av2}} \Rightarrow \frac{W_1}{\Delta t_1} = \frac{W_2}{\Delta t_2} \Rightarrow \frac{16m}{20} = \frac{40m}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = 50 \text{ s}$$

نیروهای وزن و F_1 عمود بر جهت جابجایی هستند بنابراین کاری انجام نمی‌دهند، همچنین نیروی F_2 به دو نیروی F_x و F_y تجزیه می‌شود که نیروی F_y بر جهت جابجایی عمود است لذا کاری انجام نمی‌دهد، بنابراین داریم:

$$\vec{F}_2 = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} = (F_2 \cos 53^\circ) \vec{i} + (F_2 \sin 53^\circ) \vec{j} \\ \Rightarrow \vec{F}_2 = (15 \times 0.6) \vec{i} + (15 \times 0.8) \vec{j} = 9\vec{i} + 12\vec{j}$$

$$W_{F_2} = F_2 \cdot d = 9 \times 6 = 54 \text{ J}$$

$$W_{F_3} = F_3 \cdot d \cos \theta = 4 \times 6 \times (-1) = -24 \text{ J}$$

بنابراین کار نیروی برآیند برابر است با:

$$W_T = W_{F_2} + W_{F_3} = 54 - 24 = 30 \text{ J}$$

ابتدا با استفاده از معادله پیوستگی، تندی خروج آب در قسمت B را به دست می‌آوریم:

$$A_A v_A = A_B v_B \Rightarrow \pi \left(\frac{D_A}{2} \right)^2 \times v = \pi \left(\frac{D_B}{2} \right)^2 v_B \Rightarrow v d_A^2 = d_B^2 \times v_B$$

$$\xrightarrow{d_B = \frac{1}{2} d_A} v_B = 8 \text{ m/s}$$

با استفاده از قضیه کار و انرژی جنبشی، کار کل انجام شده روی ۴ kg آب را به دست می‌آوریم:

$$W = K_2 - K_1 = \frac{1}{2} \times 4 \times (8^2 - 2^2) = 120 \text{ J}$$

کار نیروی F برابر است با:

$$W_F = F d \cos \theta = 20 \times 4 \times \cos 53^\circ = 20 \times \frac{6}{10} \times 4 = 48 \text{ m}$$

برای هر سه جسم، قانون پایستگی انرژی مکانیکی را برای نقاط A و B می‌نویسیم:

$$\text{جسم ۱: } E_{1A} = E_{1B} \Rightarrow \cancel{K_{1A}} + U_{1A} = K_{1B} + \cancel{U_{1B}} \Rightarrow mgh = K_{1B}$$

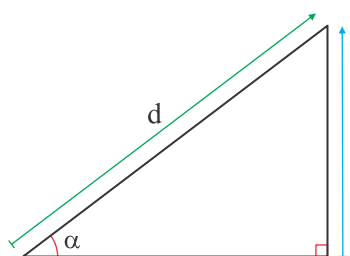
$$\text{جسم ۲: } E_{2A} = E_{2B} \Rightarrow \cancel{K_{2A}} + U_{2A} = K_{2B} + \cancel{U_{2B}} \Rightarrow mgh = K_{2B}$$

$$\text{جسم ۳: } E_{3A} = E_{3B} \Rightarrow \cancel{K_{3A}} + U_{3A} = K_{3B} + \cancel{U_{3B}} \Rightarrow 2mgh = K_{3B}$$

در نتیجه:

$$K_{3B} = 2K_{2B} = 2K_{1B} \Rightarrow 2K_1 = 2K_2 = K_3$$

با استفاده از سطح شیب‌دار و روابط مثلثاتی رابطه بین جابه‌جایی و ارتفاع به دست می‌آید.



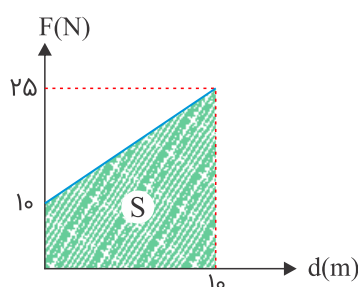
$$\sin \alpha = \frac{h}{d} \Rightarrow d = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{h}{\sin 37^\circ} = \frac{h}{0.6}$$

پس می‌توان رابطه نیرو را برحسب جابه‌جایی در سطح شیب‌دار بیان کرد:

$$F = 2/5h + 10 \xrightarrow{h=0.6d} F = 2/5\left(\frac{6}{10}\right)d + 10 \Rightarrow F = 1/5d + 10$$

برای محاسبه کار نیروی F مساحت زیر نمودار $(F - d)$ را به ازای $h = 6 \text{ m}$ که $d = 10$ می‌شود به دست می‌آوریم:

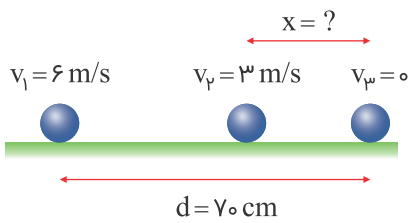
$$W_F = S = \left(\frac{25 + 10}{2}\right)(10) \Rightarrow W_F = 175 \text{ J}$$



$$\begin{aligned} W_{mg} &= -mg\Delta h = -2(10)(6) = -120 \text{ J} \Rightarrow W_F + W_{mg} \\ &= \frac{1}{2}m(v_f^2 - 0) \Rightarrow 175 - 120 = v_f^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{55} \simeq 7.4 \text{ m/s} \end{aligned}$$

باتوجه به گزینه‌ها می‌توان مقدار تقریبی را حدس زد.

مسیر حرکت جسم به صورت زیر است:



با استفاده از قضیه کار-انرژی جنبشی بین نقاط (۱) و (۳) داریم:

$$W_t = \Delta K = K_3 - K_1 \Rightarrow -f_k d = -\frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow f_k = \frac{m v_1^2}{2d}$$

$$\Rightarrow f_k = \frac{0.05 \times 36}{2 \times 0.7} = \frac{18}{14} = \frac{9}{7} \text{ N}$$

قضیه کار و انرژی برای نقاط (۲) و (۳) نوشته می‌شود:

$$W_t = K_3 - K_2 \Rightarrow -f_k x = -K_2 \Rightarrow \frac{9}{7} x = \frac{1}{2} (0.05) (3)^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{9} \times 0.05 \text{ m} = \frac{7}{9} \times \frac{5}{100} \times 100 \text{ cm} = 17/5 \text{ cm}$$

$$f_k = \frac{1}{4}mg$$

مسافت طی شده روی سطح شیب دار ۲ برابر ارتفاع B از زمین است.

$$\frac{h}{d} = \sin 30^\circ \Rightarrow h = \frac{1}{2}d \Rightarrow d = 2h$$

$$\text{در بالا رفتن: } (U_B + K_B) - (U_A + K_A) = W_{f_k}$$

$$\Rightarrow mgh - \frac{1}{2}mv^2 = -f_k \times d \Rightarrow mgh - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{4}mg \times 2h$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{3}{2}mgh} = \cancel{\frac{1}{2}mv^2} \Rightarrow 3gh = v^2 \Rightarrow 3 \times 10 \times h = 36 \Rightarrow h = 1/2 \text{ m}$$

$$\text{در برگشت: } (U_A + K_A) - (U_B + K_B) = W_{f_k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - mgh = -f_k \times d$$

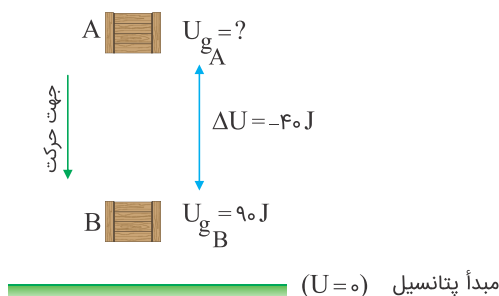
$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - mgh = -\frac{1}{4}mg \times 2h \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - mgh = -\frac{1}{2}mgh$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mgh \Rightarrow v^2 = 10 \times 1/2 = 12 \Rightarrow v = 2\sqrt{3}$$

همان‌طور که می‌دانید کار نیروی جاذبه زمین مثبت است، پس می‌توان نتیجه گرفت جسم در جهت نیروی جاذبه (به سمت پایین) حرکت کرده است. از طرفی، تغییر انرژی پتانسیل گرانشی یک جسم برابر با قرینه کار نیروی وزن جسم است:

$$\Delta U_g = -W_{mg}$$

در صورتی که مبدأ پتانسیل را سطح زمین فرض کنیم، باتوجه به شکل زیر می‌توان نوشت:



$$\Delta U_g = -W_{mg} \Rightarrow U_{gB} - U_{gA} = -40 \text{ J} \xrightarrow{U_{gB} = 90 \text{ J}} U_{gA} = 130 \text{ J}$$

* باتوجه به این که کار نیروی وزن در جابجایی جسم از نقطه A تا B مثبت است، می‌توان نتیجه گرفت که نقطه B پایین‌تر از نقطه A است. بنابراین انرژی پتانسیل گرانشی در نقطه A باید بیشتر از نقطه B باشد، پس گزینه ۱ و ۲ نادرست است.

نیروهای وزن، عمودی سطح، اصطکاک و F بر جسم وارد می‌شوند. از این میان کار نیروهای اصطکاک و F غیر صفر است (نیروهای وزن و عمودی سطح، بر جابه‌جایی عمودند و کار آنها صفر می‌شود). با استفاده از قضیه کار-انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} W_t = \Delta K &\Rightarrow W_f + W_F = \Delta K \Rightarrow W_f + F \cdot d \cos \theta = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \\ &\Rightarrow W_f + 24 \times 15 \times 1 = \frac{1}{2} \times 2 (64 - 4) \\ &\Rightarrow W_f + 360 = 60 \Rightarrow W_f = -300 \text{ J} \end{aligned}$$

از طرفی با توجه به رابطه $W_F = -f_k d$ داریم:

$$-300 = -f_k \times 15 \Rightarrow f_k = 20 \text{ N}$$

چون از مقاومت هوا صرف نظر شده است پس انرژی مکانیکی در طول مسیر پایسته است. بنابراین می توان نوشت:

$$E_1 = E_2 \Rightarrow U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \xrightarrow{K_2=2U_2} U_1 = U_2 + 2U_2 = 3U_2$$

$$\Rightarrow mgh_1 = 3mgh_2 \Rightarrow h_1 = 3h_2 \Rightarrow 60 = 3h_2 \Rightarrow h_2 = 20 \text{ m}$$

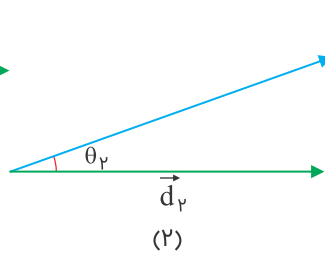
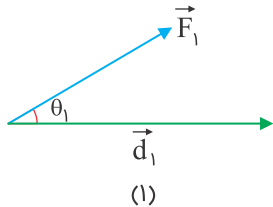
دو جسم با طناب به هم وصل هستند، پس تندی دو جسم یکسان است و باتوجه به رابطه $k = \frac{1}{2}mv^2$ داریم:

$$\frac{K_{1 \text{ kg}}}{K_{2 \text{ kg}}} = \frac{\frac{1}{2} \times 1 \times v^2}{\frac{1}{2} \times 2v^2} = \frac{1}{2}$$

رابطه مربوط به کاری که شخص توسط طناب، بر روی جعبه انجام می‌دهد، به صورت $W_F = F d \cdot \cos \theta$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$F = \frac{W_F}{d \cdot \cos \theta}$$

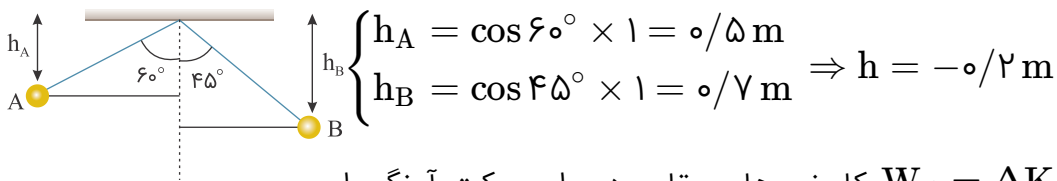
زاویه θ در هر دو حالت یکسان نیست.



همان‌طور که مشاهده می‌شود، وقتی طناب بلندتر است، زاویه θ بین نیروی طناب (که این نیرو همیشه در امتداد طناب است)، با جابجایی، کوچک‌تر است. رابطه بالا نشان می‌دهد که F با $\cos \theta$ نسبت وارون دارد. با توجه به این نکته که هرچه زاویه‌ای کوچک‌تر باشد، کسینوس آن بزرگ‌تر است، داریم:

$$F = \frac{\overset{\text{یکسان}}{\uparrow} W_F}{(\cos \theta) \underset{\text{یکسان}}{\downarrow} d} \xrightarrow{\theta_2 < \theta_1 \Rightarrow \cos \theta_2 > \cos \theta_1} F_2 < F_1$$

گام اول: تغییر ارتفاع گلوله را محاسبه می‌کنیم:



گام دوم: از رابطه $W_f = \Delta K + \Delta U$ کار نیروهای مقاوم در برابر حرکت آونگ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} W_f &= \left(\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \right) + mg \Delta h \\ \Rightarrow W_f &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{10} (1 - 0) + \frac{4}{10} \times 10 \times (-0.2) = 0.2 - 0.8 = -0.6 \text{ J} \end{aligned}$$